RELATO DE EXPERIÊNCIA

DITADO DE CONJUNTOS: A IMPORTÂNCIA DA COMPREENSÃO DOS SIGNIFICADOS DOS SÍMBOLOS DA LINGUAGEM MATEMÁTICA

Diogo Miranda
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
diogo.mategramatica@ime.uerj.br

Jaime Velasco
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
jaimevelasco@ime.uerj.br

Sueli Cunha
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
sueli.cunha@ime.uerj.br

Resumo:
O presente estudo visa mostrar a importância de se conhecer os símbolos que os sinais do alfabeto da Linguagem Matemática representam, fazendo com que esses sinais tenham valor linguístico e possam, assim, ser utilizados para expressar conceitos e resultados. Para alcançar esse objetivo, analisamos os resultados de um ditado realizado em uma turma de 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual. As expressões contidas nesse ditado representam conjuntos e a tarefa dos alunos era escrevê-las em Linguagem Matemática. As expressões ditadas foram construídas de modo a evitar que, ao traduzi-las para a Linguagem Matemática, os alunos fizessem apenas uma associação mecânica entre conectivos-chave e operação correspondente, exigindo que eles saibam, de fato, o significado de cada operação. A análise das respostas do ditado, além de revelar a importância de se ter conhecimento dos significados dos símbolos matemáticos, mostra que é possível que alunos de Ensino Médio compreendam tais significados.

Palavras-chave: Educação Matemática. Gramática da Linguagem Matemática. Lógica Matemática. Teoria dos Conjuntos.

Introdução

A Linguagem Matemática, assim como o Português (ou qualquer outra linguagem), possui um alfabeto e um conjunto de regras (denominado gramática), que normatizam o modo correto de se expressar nessa linguagem. Entretanto, enquanto o alfabeto da língua portuguesa é composto somente de letras, o alfabeto da Linguagem Matemática é mais amplo: possui dígitos, letras do alfabeto latino ou grego e outros sinais. Além disso, a Linguagem Matemática tem outro aspecto peculiar: ela não possui oralidade, fazendo com que dependa de uma linguagem natural (no nosso caso, o Português) para ser verbalizada, e os símbolos de seu alfabeto não representam sons, mas sim conceitos (CUNHA, 2017, p. 14).

Apesar de a Linguagem Matemática fazer uso da linguagem natural de um indivíduo para se constituir, há diversas diferenças entre essas duas linguagens. Por exemplo, a Linguagem Matemática faz uso da linguagem da Lógica Matemática

(*Logiquês*), bem como da Álgebra (*Algebrês*) e da Geometria (*Geometriquês*). Assim, conectivos lógicos como "e" e "se..., então", que frequentemente aparecem em sentenças da Linguagem Matemática, possuem significados que às vezes divergem daqueles que esses termos possuem na linguagem natural.

Por exemplo, no cotidiano, dificilmente se aceita a frase "João morreu e nasceu." como verdadeira; a frase correta seria "João nasceu e morreu.". Isso ocorre porque, na lógica do cotidiano, o conectivo "e" tem embutido em seu significado uma noção sequencial, o que não necessariamente acontece na Lógica Matemática. A operação de conjunção, que é a operação que o conectivo "e" representa no universo da Lógica Matemática, transmite a noção de verdade simultânea de fatos, sem levar em consideração a ordem em que eles acontecem (ou aconteceram). Assim, se o nascimento e a morte de João realmente forem acontecimentos verdadeiros, em Lógica Matemática, "João morreu e nasceu." e "João nasceu e morreu." são ambas proposições verdadeiras (SALMON, 2010).

No ensino das noções elementares da teoria dos conjuntos (que geralmente ocorre no 1º ano do Ensino Médio), especialmente as operações com conjuntos, é comum o surgimento de proposições compostas do tipo "7 pertence aos naturais **e** aos racionais." ou "x é par **ou** múltiplo de 7.". No entanto, nas nossas aulas, temos notado que tais expressões causam certa estranheza aos alunos. Esse desconforto vem, principalmente, do fato de os alunos não possuírem conhecimento das noções básicas de Lógica Matemática. O que se tem ocorrido é que o ensino dos conceitos de Lógica Matemática tem sido frequentemente deixado de lado e, mesmo quando esse ensino é realizado, dá-se ênfase ao uso de procedimentos e fórmulas, não propiciando o desenvolvimento do raciocínio lógico (SOARES; DORNELAS, 2007). Por exemplo, a proposição composta P: "7 pertence aos naturais **e** aos racionais." é formada pelas proposições simples p: "7 pertence aos naturais." e q: "7 pertence aos racionais.", mediante o uso do conectivo "e". Temos observado que os alunos não interpretam uma expressão deste tipo como se fosse uma única expressão, com sentido próprio, mas sim como se fosse uma expressão contendo duas partes independentes, onde, para se estabelecer o significado da expressão como um todo, apenas a primeira expressão deva ser levada em consideração, e a segunda possa ser ignorada. Assim, eles entendem que 7 é natural, mas ignoram o fato de que ele também é racional, assim como compreendem que x deve ser par, mas não concluem que x pode ser um múltiplo de 7 ímpar.

Por ser uma linguagem própria, distinta da linguagem natural, os alunos também precisam aprender a ler, escrever e a interpretar informações em *Logiquês*. Segundo Luria (1979 apud NETO; ABAR, 2011), apesar da vivência cultural propiciar a construção de estruturas lógicas de pensamento, que servem de base para a construção de conceitos lógicos matemáticos fundamentais, o pensamento lógico nos moldes da Lógica Matemática não faz parte do processo evolutivo do cérebro. “Seria incorreto pensar que o homem nasce com 'sentido lógico' acabado e que as ‘sensações lógicas’ experimentadas pelo homem adulto desenvolvido são ‘propriedades do espírito’, que existem como inatas em toda pessoa” (LURIA, 1979, p. 105 apud NETO; ABAR, 2011, p. 4). Assim sendo, “devemos propiciar ao aluno contato com estruturas de pensamento diferentes e dar possibilidade dele desenvolver o pensamento lógico com estrutura da lógica clássica.” (NETO; ABAR, 2011, p. 4).

Foram justamente as dificuldades apresentadas por alunos durante o estudo de conceitos elementares da Teoria dos Conjuntos, como a dificuldade de interpretar informações contidas em proposições compostas (aquelas formadas através de conectivos), como citado anteriormente, que nos levou a desenvolver uma pesquisa em uma turma de Ensino Médio no âmbito de uma especialização. O intuito foi investigar os efeitos que a abordagem prévia de noções básicas de Lógica Matemática pode trazer para o ensino/aprendizagem de conceitos elementares da Teoria dos Conjuntos. A abordagem dos conteúdos foi feita de forma a evitar a simples memorização de fórmulas, procedimentos e definições, priorizando a investigação, a descoberta, o desenvolvimento do raciocínio lógico e, sobretudo, a compreensão da gramática e dos significados dos símbolos representados pelos sinais da Linguagem Matemática envolvida.

Neste trabalho, no entanto, é apresentada uma das atividades desenvolvidas com os alunos. A atividade consiste em um ditado e foi aplicada depois da abordagem, em sala de aula, de conceitos de Lógica Matemática e Teoria dos Conjuntos. Os alunos que participaram dessa pesquisa eram de uma turma de 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual, localizada no estado do Rio de Janeiro.

1. Referencial teórico

No desenvolvimento da pesquisa mencionada anteriormente, buscamos fazer com que os alunos compreendessem não somente os conceitos, mas também os significados de alguns símbolos matemáticos e um pouco da gramática da linguagem da Lógica Matemática e da Teoria dos Conjuntos. A atividade aqui apresentada teve como objetivo avaliar se as concepções dos alunos sobre as operações com conjuntos coincidiam com os significados dessas mesmas operações. Também visou avaliar o domínio da Linguagem Matemática usada na representação das operações com conjuntos. Em face disso, é importante tecer alguns esclarecimentos relacionados aos termos "símbolo" e "significado".

Hiebert diz que "símbolos" são "[...] entidades que representam ou tomam o lugar de outra coisa" (1988, p. 334, tradução nossa). Aqui, para Hiebert, entidade é desde um objeto físico até traços escritos em um papel. Já Bakhtin (1981, p. 20) caracteriza "símbolo" como tudo que "[...] possui significado e remete a algo situado fora de si mesmo"[1]. Para Bakhtin (1981), é essencial que, para ser chamado de símbolo, um objeto físico ou outra entidade qualquer "ultrapasse suas próprias particularidades" e passe a refletir ou representar outra coisa, isto é, converta-se em um produto ideológico.

Restringindo-nos aos símbolos escritos, que são os que nos interessam, Hiebert (1988) classifica-os em copiáveis e não copiáveis. O que diferencia cada um desses dois tipos de símbolos escritos é o fato de que os símbolos do primeiro tipo podem ser "produzidos por diferentes pessoas em diversas situações sem perderem sua identidade" (HIEBERT, 1988, p. 334, tradução nossa), enquanto os símbolos do segundo tipo perdem sua identidade com a mais leve mudança em suas características físicas. Exemplos de símbolos copiáveis são as notações matemáticas, e de símbolos não copiáveis são as pinturas. "O numeral $3/4$, por exemplo, pode assumir diversas formas físicas diferentes ($^3/_4, \frac{3}{4}, 3/4$), todas reconhecidas como o mesmo número" (HIEBERT, 1988, p. 334, tradução nossa).

Bakhtin chama atenção para a diferença entre a descodificação (compreensão) de um símbolo (signo) e a identificação de um sinal[2].

---

[1] Em seu texto, Bakhtin utiliza o termo "signo" em vez de "símbolo".
[2] Bakhtin utiliza o termo "sinal" para designar a entidade que materializa o símbolo.

> O processo de descodificação (compreensão) não deve, em nenhum caso, ser confundido com o processo de identificação. Trata-se de dois processos profundamente distintos. O signo é descodificado; só o sinal é identificado (BAKHTIN, 1981, p. 68).

A compreensão de um elemento linguístico é "a apreensão da orientação que é conferida à palavra por um contexto e uma situação precisos" (BAKHTIN, 1981, p. 69), o que, para nós, como veremos, equivale ao entendimento do seu significado. Bakhtin (1981) ainda prossegue em suas considerações afirmando que, enquanto um elemento linguístico for percebido apenas como um sinal, ele não possuirá valor linguístico algum. Assim, se tomarmos, por exemplo, o sinal "$-$" de forma isolada, fora de qualquer contexto, ele será apenas um traço no papel, não despertando significado algum. Para que ele seja um símbolo, é necessário aplicá-lo em um contexto e situação precisos. Ao escrevermos "$7-3=4$", em um contexto aritmético, o sinal "$-$" torna-se um símbolo cujo significado é "subtrair" (no caso, 3 unidades de 7 unidades). Por outro lado, ainda no contexto aritmético, ao escrevermos "-3", o sinal "$-$" torna-se um símbolo cujo significado é "simétrico" (no exemplo em questão, de 3).

Para definir o que entendemos por "significado" de um símbolo, nos baseamos na definição de "sentido" de uma palavra (símbolo), acompanhada do que o distingue de "significado", que, segundo Vygotski (2001, p. 144), é de autoria de Paulhan:

> [...] o sentido de uma palavra é a soma de todos os acontecimentos psicológicos que essa palavra desperta na nossa consciência. É um todo complexo, fluido, dinâmico que tem várias zonas de estabilidade desigual. O significado mais não é do que uma das zonas do sentido, a zona mais estável e precisa. Uma palavra extrai o seu sentido do contexto em que surge; quando o contexto muda o seu sentido muda também. O significado mantém-se estável através de todas as mudanças de sentido.

Paulhan ainda complementa dizendo que o significado de uma palavra no dicionário "[...] não passa de uma pedra no edifício do sentido [...]" (VYGOTSKI, 2001, p. 144). Portanto, para nós, "significado" de um símbolo é o sentido particular atribuído a ele em um contexto concreto e preciso.

2. Apresentação da atividade

Não é muito comum o uso de ditados para avaliar a aprendizagem de conteúdos matemáticos, porém julgamos adequado utilizar esse tipo de avaliação por entender que ela demonstra, com mais fidelidade, o nível de fluência dos alunos na Linguagem Matemática. Além disso, indica também o nível de familiarização dos alunos com os significados das operações lógicas e com conjuntos. Isso ocorre porque os alunos escutam as expressões e, em seguida, devem traduzi-las para Linguagem Matemática, contando apenas com pouco tempo para isso e sem poder fazer releituras constantes do que foi dito, diferentemente de quando se tem uma avaliação por escrito.

Inicialmente, foram escritos no quadro as definições de F, V e M (três subconjuntos de H, que representa o conjunto dos seres humanos), como se segue: $F = \{x \mid x$ é uma pessoa que joga futebol$\}$, $V = \{x \mid x$ é uma pessoa que joga vôlei$\}$ e $M = \{x \mid x$ é uma mulher$\}$.

Quadro 1 - Expressões do ditado de conjuntos e suas respectivas traduções para a Linguagem Matemática

Expressões ditadas	Linguagem Matemática
1. Conjunto das pessoas que não jogam futebol	F^{C}
2. Conjunto das mulheres que jogam futebol	$M \cap F$
3. Conjunto das pessoas que jogam futebol ou vôlei	$F \cup V$
4. Conjunto dos homens	M^{C}
5. Conjunto das mulheres que não jogam vôlei	$M - V$
6. Conjunto das pessoas que jogam tanto futebol quanto vôlei	$F \cap V$
7. Conjunto dos homens que jogam futebol	$M^{C} \cap F$
8. Conjunto das mulheres que jogam futebol ou vôlei	$M \cap (F \cup V)$
9. Conjunto das mulheres que não jogam futebol nem vôlei	$(M - F) \cap (M - V)$
10. Conjunto das jogadoras de futebol que não jogam vôlei	$(M \cap F) - V$

Fonte: O autor, 2016.

Note que H é o conjunto universo, isto é, contém todos os elementos com os quais estamos trabalhando, que são os seres humanos. Posteriormente, ditaram-se, na ordem em que aparecem, as dez expressões contidas no Quadro 1, representando conjuntos resultantes de operações com os conjuntos H, M, F e V, para que os alunos as escrevessem em Linguagem Matemática, como descrito ao lado das expressões.

3. Resultado e discussões

Por não ser uma atividade comum nas aulas de matemática, o ditado foi uma experiência nova para os alunos. Mas essa não foi a única novidade. Diferentemente do que acontece nos ditados em português, onde a preocupação maior dos alunos reside na escrita correta das palavras, aqui há maior preocupação em determinar o símbolo matemático cujo significado melhor representa o sentido apreendido da expressão ditada. Apenas após esse processo é que o aluno irá se preocupar com a ortografia, só que da Linguagem Matemática.

Em média, os alunos traduziram corretamente 60% dos conjuntos ditados (sendo que 50% da turma acertou 60% ou mais do ditado), e, do total de traduções realizadas pela turma, 60% estão corretas. Além disso, os maiores percentuais de acerto ocorreram nas traduções dos conjuntos resultantes de operações relacionadas à diferença de dois outros conjuntos (expressões ditadas de números 1, 4, 5, 9 e 10).

A análise das traduções dos alunos revela três tipos de erros mais frequentes, que são:

1. *Erro de pontuação*

Chamamos de erro de pontuação aquele que surge somente pelo não uso dos parênteses, quando seu uso é necessário, ou pelo posicionamento inadequado destes, não podendo haver outra incorreção presente na tradução para a Linguagem Matemática. A pontuação, em Linguagem Matemática, tem por objetivo eliminar ambiguidades, deixando claro qual é a operação principal contida na expressão.

2. *Erro por excesso*

O erro por excesso consiste em inserir "$H \cup$ ", pelo menos uma vez, em algum lugar da tradução, gerando um conjunto distinto do que foi ditado. Essa diferença entre o conjunto descrito pela expressão ditada e o conjunto representado pelo aluno advém do fato de que, como H é o conjunto universo, a união de H com qualquer outro conjunto resulta no próprio H, sendo que a expressão ditada refere-se a um conjunto menor. Com isso, o aluno representa um conjunto com mais elementos do que deveria. Por isso, esse tipo de erro chama-se erro por excesso.

3. *Erro de substituição*

O erro de substituição surge quando se utiliza um símbolo, que representa uma operação ou um conjunto, no lugar de outro, gerando um conjunto diverso do que está descrito na expressão ditada. A maioria dos erros de substituição (aproximadamente 69%) consiste na utilização do sinal ∪ em vez de ∩.

Os erros de pontuação e por excesso respondem, cada um, por $18,75\%$ das traduções incorretas. Já o erro de substituição foi o mais frequentemente observado. Foi cometido por 75% dos alunos participantes e está presente em $40,63\%$ das traduções incorretas. Do total de traduções que contém o erro de substituição, $84,62\%$ não contém outro tipo de erro.

Esses resultados revelam dois pontos positivos. O primeiro é a correção ortográfica das traduções dos alunos. Se levarmos em conta que $84,62\%$ das traduções com erro de substituição, que foi o mais frequentemente observado, não contêm outro tipo de erro, podemos dizer que, no mínimo, $81,25\%$ das traduções no Ditado de Conjuntos estão, do ponto de vista ortográfico, corretas. O segundo é o alto percentual de associação entre o significado captado da expressão ditada e o significado da operação que melhor o representa, haja vista que 60% do total de traduções está correto e metade dos alunos teve percentual de acerto individual igual ou superior a 60%.

Considerações finais

Observe que todas as expressões ditadas possuem significados que remetem às operações com conjuntos sem, contudo, utilizar os conectivos convencionais que as caracterizam (como “e” para a interseção de conjuntos, “ou” para a união de conjuntos e o conectivo “e”, seguido do conectivo “não”, para a diferença de conjuntos). Para escrever essas expressões em Linguagem Matemática, exige-se do aluno não apenas que ele faça uma associação mecânica entre conectivos-chave e operação correspondente, mas que ele saiba, de fato, o significado de cada operação. Duas expressões emblemáticas da necessidade disso são as expressões 6, 7 e 10 (Quadro 1).

Na expressão 6, o aluno precisa reconhecer que a expressão "tanto...quanto" apresenta uma ideia de simultaneidade, o que, em Linguagem matemática, é melhor representada pelo conectivo “e” (da Lógica Matemática), que tem como significado “verdade simultânea”; portanto, a expressão 6 indica uma interseção de conjuntos, nesse caso, dos conjuntos F e V (pessoas que jogam futebol e vôlei, respectivamente). Já na expressão 7, a expressão “que”, por caracterizar uma restrição, também é mais bem representado pelo conectivo “e”, da Lógica Matemática, o que indica uma interseção de conjuntos (nesse caso, do conjunto dos homens com o das pessoas que jogam futebol). Finalmente, na expressão 10, o aluno deve concluir que a frase "jogadora de futebol" indica que as pessoas do referido conjunto devem possuir simultaneamente estas duas propriedades: ser mulher e jogar futebol, o que, em Linguagem Matemática, tem como significado mais próximo a interseção do conjunto das mulheres com o conjunto das pessoas que jogam futebol (conjuntos M e F, respectivamente).

Essas observações e os resultados do ditado mostram que é possível fazer com que os alunos deixem de enxergar os sinais do alfabeto matemático apenas como sinais puros, sem significado, e passem a enxergá-los como símbolos, adquirindo assim valor linguístico. E mais, elas mostram que é importante ter conhecimento dos significados dos símbolos, sabendo em qual(is) contexto(s) particular(es) eles podem ser utilizados. Devido às particularidades da Linguagem Matemática, sustentamos que a Linguagem Matemática deva ser tratada como uma língua estrangeira. Como o entendimento da Linguagem Matemática depende do conhecimento de conceitos matemáticos, além do domínio de uma língua natural, o professor de Matemática deve ser o responsável por ensinar essa linguagem.

Referências

BAKHTIN, M. *Marxismo e Filosofia da Linguagem*. Tradução de Michel Lahud e Yara F. Vieira. 2. ed. São Paulo: Hucitec, 1981.

CUNHA, S. *Ler, Escrever e Compreender a Linguagem Matemática*. In: PAIVA, M.G.V. (Org.). Psicopedagogia: contribuições para o ensino da matemática e para clínica. 1. ed. Rio de Janeiro: Letra Capital, 2017. p. 47-62.

HIEBERT, J. *A theory of developing competence with written mathematical symbols*. Educational Studies in Mathematics, [S.l.], v. 19, n. 3, p. 333-355, Aug. 1988.

NETO, R. S. M.; ABAR, C. A. A. P. *Lógica Matemática no Ensino Médio: dualidades em jogo*. In: I CONGRESSO DO SINPROSP, 2011, São Paulo. *Comunicação científica*. São Paulo: SIMPROSP, 2011. Disponível em: < http://www.sinprosp.org.br/congresso_matematica/revendo/dados/files/textos/Sessoes/L%C3%93GICA%20MATEM%C3%81TICA%20NO%20ENSINO%20M%C3%89DIO_%20DUALIDADES%20EM%20JOGO.pdf> . Acesso em: 10/07/2017.

SALMON, W. C. *Lógica*. Tradução de Álvaro Cabral. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

SOARES, F.; DORNELAS, G. N. *A lógica no cotidiano e a lógica na Matemática*. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. *Minicursos*. Belo Horizonte: SBEM, 2007. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/minicursos.html>. Acesso em: 19 jul. 2017.

VIGOTSKI, L. S. *Pensamento e Linguagem.* Edição de Ridendo C. Mores. [S.l.]: eBooksBrasil, 2001. E-book.