COMUNICAÇÃO CIENTÍFICA

DEFINIÇÃO *VERSUS* PROPRIEDADE

José de Jesus Rosa
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
jose.mategramatica@ime.uerj.br

Sueli Cunha
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
sueli.cunha@ime.uerj.br

Jaime Velasco
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
jaimevelasco@ime.uerj.br

Resumo:
A definição de objetos matemáticos é parte central do processo científico e didático. É sob seu prisma que surgem teoremas e proposições. No entanto, não é difícil encontrar, em vários livros e materiais de apoio didático, objetos matemáticos definidos a partir de suas propriedades. Neste trabalho, discute-se o que diferencia uma definição matemática consistente de uma propriedade, sob o ponto de vista da Semântica da Linguagem Matemática. Analisamos ainda alguns casos clássicos onde se observa este tipo de inconsistência.
Palavras-chave: Definição Matemática. Gramática da Linguagem Matemática. Semântica.

Introdução

Na Linguística, *semântica* é o estudo do significado. É natural que, no estudo da Linguagem Matemática, abordemos também sua semântica. Estuda-se, pois, neste campo, o significado de conceitos matemáticos, a saber, as definições.

O estudo das definições remonta ao tempo de Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.) quando da sua obra *Analíticos Posteriores*. Nesta obra, Aristóteles busca o conceito de definição e estabelece alguns princípios para se definir: “A definição dá o conhecimento da essência do sujeito [...] a definição refere-se à essência, sendo evidente que todas as demonstrações propõem e assumem a essência...” (sic).

Desde então, muitas obras se voltaram para o assunto, como por exemplo *Investigações Filosóficas* de Wittgenstein (1889-1955) e *Introduction to Logic* de Patrick Suppes (1922-2014). Este último segue de perto as regras para definição presentes em *Analíticos Posteriores*. Observa-se também que, de acordo com Pais (2007), definição matemática deve resumir características essenciais de determinado conceito.

O que se extrai, então, destes estudos é a essencialidade dos objetos a serem definidos, isto é, as definições matemáticas devem conter apenas características fundamentais dos objetos, informações básicas que servem para alcançar teoremas e proposições, e que são propriedades intrínsecas a eles.

Assim, temos que definições diferem de propriedades pelo o que é essencial. Contudo, é comum encontrarmos, em livros-texto e materiais de apoio didático, objetos matemáticos definidos não por uma expressão que exprima a sua essencialidade, mas por alguma de suas propriedades (proposição). Matematicamente, não é incorreto definir objetos desta forma, desde que as propriedades usadas para se definir sejam equivalentes às definições. Contudo, consideramos que tal processo não seja gramaticalmente, nem didaticamente, adequado. Neste trabalho, apresentamos três casos, a saber, mediatriz, subespaço vetorial e função convexa, e discutiremos, sob o prisma da gramática da linguagem matemática, qual a definição que carrega precisão semântica.

1 Três casos em análise

Na Subseção 1.1, veremos um caso onde a análise etimológica pode ser aplicada para determinar uma definição gramaticalmente consistente (mediatriz). Já na Subseção 1.2, o critério adotado é exclusivamente o da essencialidade (espaço vetorial), e por fim, na Subseção 1.3, adota-se o critério de gradação de conceitos, isto é, o uso de conceitos mais básicos para se definir conceitos mais complexos (função convexa).

1.1 Mediatriz

A definição de mediatriz é frequentemente apresentada a partir do conceito de lugar geométrico.

Definição 1: (PUTNOKI,1990) "*Mediatriz* é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de dois pontos distintos." (Figura 1)

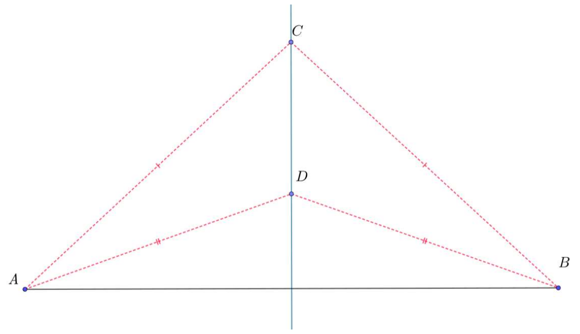

Figura 1 – Mediatriz de um segmento como lugar geométrico

O conceito de mediatriz encontra significado bem mais simples do que o apresentado na Definição 1. Observemos que esta definição exige que o leitor já tenha bem fundamentados os conceitos de lugar geométrico e equidistância. Porém, analisando a etimologia desta palavra vemos que mediatriz encontra origem no latim *mediatrix*[1], termo que se referem a corte, divisão.

Assim, uma definição mais consistente seria:

Definição 2: (DOLCE; POMPEO, 2013) *Mediatriz* de um segmento é a reta perpendicular a ele em seu ponto médio.

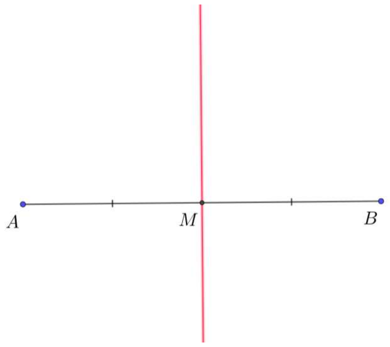

Figura 2 – Mediatriz de um segmento

Nota-se que esta última definição carrega fatos essenciais, se comparados com a Definição 1. É uma expressão mais sucinta, que exige do leitor o conhecimento de conceitos mais básicos.

Como dito antes, matematicamente não é um erro assumir a Definição 1, pois como veremos no Teorema 1, ambas as definições são equivalentes.

Teorema 1: *Um ponto é equidistante dos extremos de um segmento se, e somente se, ele pertence a sua mediatriz.*

<u>Demonstração</u>:

Denotemos por M o ponto médio do segmento AB, isto é, $\overline{AM} = \overline{MB}$.

[1] Machado, José Pedro; Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa. São Paulo: Livros Horizonte, 1967

Suponhamos inicialmente que P seja um ponto equidistante de A e de B (isto é, $\overline{PA} = \overline{PB}$). Nesse caso, pelo critério LLL de congruência de triângulos (Figura 3), concluímos que AMP e BMP são triângulos congruentes. Em particular, $\angle AMP$ e $\angle BMP$ são ângulos de mesma medida. Porém, como eles são suplementares, concluímos que são retos. Portanto, MP é perpendicular a AB e P pertence à mediatriz de AB (conforme a Definição 2).

Reciprocamente, suponhamos que P seja um ponto qualquer sobre a mediatriz r de AB. Como $\overline{AM} = \overline{MB}$ e r é perpendicular a AB, temos que os triângulos AMP e BMP são congruentes, pelo critério LAL (Figura 4). Portanto, segue que P é equidistante de A e de B.

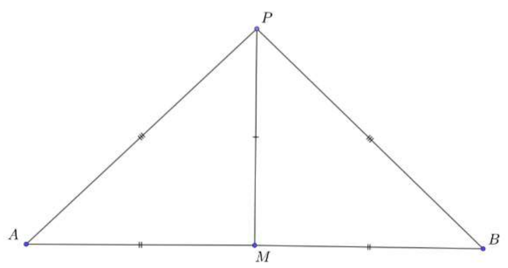

Figura 3: Critério LLL

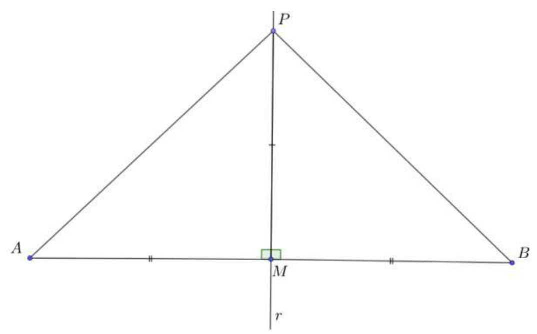

Figura 4: Critério LAL

1.2 Subespaço Vetorial

São encontradas em livros-texto três definições distintas de subespaço vetorial:

Definição 1: (BOLDRINI, 1980) (SHOKRANIAN, 2009). Seja W um subconjunto não vazio do espaço vetorial V. Dizemos que W é *subespaço vetorial* de V quando W for fechado para a soma e para a multiplicação por escalar de V, isto é:

(i) $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$;

(ii) $v \in W, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v \in \mathbb{R}$.

Definição 2: (LIMA, 2014) Seja W um subconjunto do espaço vetorial V. Dizemos que W é *subespaço vetorial* de V quando o elemento neutro de V pertence a W, e W for fechado para a soma e para a multiplicação por escalar de V, isto é:

(i) $0 \in W$;

(ii) $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$;

(iii) $v \in W$, $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha v \in \mathbb{R}$.

Definição 3: (HEFEZ, 2016) (DYM, 2007) Seja V um espaço vetorial. Então $W \subseteq V$ é dito *subespaço vetorial* de V quando W, com as mesmas operações de adição e de multiplicação por escalar de V, for um espaço vetorial.

Sob o ponto de vista da Gramática de Linguagem Matemática, a Definição 3 é a que assume a essencialidade do objeto. Definições de outros "sub-objetos" matemáticos possuem a mesma estrutura gramatical. A essência neste tipo de definição está em dizer que P é "sub-algo" de Q, se P é parte de Q e também é "algo".

A adoção das definições 1 e 2 está ligada ao fato da economicidade de palavras, ao se demonstrar se um dado conjunto é um subespaço vetorial ou não. De fato, pela Definição 1, é necessário verificar apenas duas características para um conjunto dado, enquanto que pela Definição 2, três características. Já usando a Definição 3, é necessário verificar todas as oito características que definem o espaço vetorial. No entanto, tal critério de economia não deve ser usado, uma vez que fatos importantes sobre o conceito de espaços vetoriais são ocultados.

1.3. ***Função convexa***

No caso de função convexa são encontradas duas definições distintas:

Definição 1: (LIMA, 2007). "Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f: I \to \mathbb{R}$ chama-se *convexa* quando seu gráfico se situa abaixo de qualquer de suas secantes, (Figura 5). Em termos precisos, a convexidade de f se exprime assim:

$$a < x < b \quad \text{em } I \Longrightarrow f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)."$$

Definição 2: Uma função $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita convexa quando seu gráfico se situa acima de qualquer de suas tangentes, (Figura 6) isto é, em Linguagem Matemática:

Uma função $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita convexa quando,

$$x \in [a, b] \Longrightarrow f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

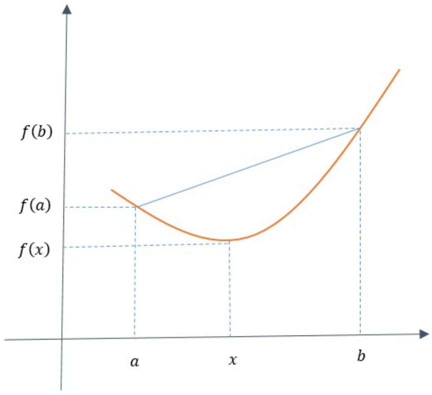

Figura 5: Função convexa pela Definição 1

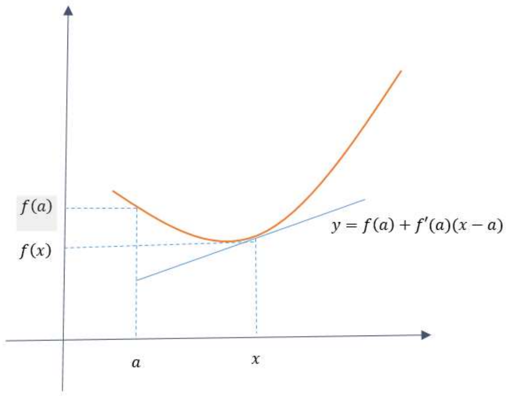

Figura 6: Função convexa pela Definição 2

Ambas as definições usam um segundo objeto matemático como conceito previamente adquirido, a saber, secantes e tangentes. Em uma primeira análise, não parece simples, então, afirmar qual entre elas é uma definição consistente e qual é propriedade.

Voltemos então a atenção à essencialidade das definições matemáticas. O essencial se refere também ao básico, isto é, todo conceito utilizado ao se definir um determinado objeto deve ser tão ou menos complexo do que o conceito que se tenta alcançar. Desta forma, a definição de função convexa gramaticalmente mais apropriada é a Definição 1, pois na Definição 2 usamos o conceito de derivada de uma função real, enquanto que na Definição 1, o conceito de secante é usado. De fato, a ideia de tangente é um conceito bem mais complexo, se comparado com o de secante. Não por acaso, tangente é tradicionalmente apresentado apenas nos cursos iniciais de Cálculo.

Considerações Finais

Observamos que o uso de propriedades matemáticas ao se definir um objeto deve ser evitado, sob pena de se ter um falso entendimento de conceitos matemáticos e saltos de etapas importantes do desenvolvimento matemático e, consequentemente, o surgimento de lacunas no processo de aprendizagem. De fato, não se conhece verdadeiramente algo se não o definimos corretamente.

Referências

ARISTÓTELES. **Analíticos Posteriores, Organom IV.** Tradução Pinharanda Gomes. Lisboa: Guimarães Editores, 1987.

BOLDRINI, José Luiz. B., *et al*. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harper & Row, 1980.

DOLCE, Osvaldo.; POMPEO José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana**, São Paulo; Atual, 2013.

DYM, Harry. **Linear Algebra in Action**. Providence: AMS, 2007.

HEFEZ, Abramo.; FERNANDES, Cecília de Souza. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

HOFFMAN. Kenneth; KUNZE. Ray. **Álgebra Linear**. Tradução Renate Watanabe. Rio de Janeiro: LTC, 1979.

LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária. IMPA, 2014

LIMA, Elon Lages. **Análise Real, vol. 1.** Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária. IMPA, 2007

MACHADO, J.P. **Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa.** São Paulo: Livros Horizonte, 1967

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

Putnoki, José Carlos. **Elementos de geometria e desenho geométrico. Vol. 1**, São Paulo: Editora Scipione, 1990

SHOKRANIAN, Salahoddin. **Introdução à Álgebra Linear.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

SUPPES, Patrick. **Introduction to Logic**. New York: Litton Education Publishing, 1957.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações Filosóficas** 6ª ed. Petrópolis: Vozes, 2009.